TEMA 1: LÓGICA

- Conceptos Básicos

- **Lógica** → Estudio del razonamiento, ver si el razonamiento es correcto.

- **Proposición** → Una oración Falsa o verdadera, pero NO ambas

Sean p y q dos proposiciones:

- Conjunción (∧) → p y q
- Disyunción (∨) → p o q
- Negación (¬) → No p

- **Tablas de verdad** → tabla donde se enumeran posibilidades de las proposiciones

p	q	p∧q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

- Ausencia parentesis → 1. ¬ 2. ∧ 3. ∨

$$\neg p \vee q \wedge r$$

- Ej $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$

p	q	$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

j = Jardinero dice verdad K = Cocinero dice verdad

- Ambos no pueden decir la verdad → $\neg(j \wedge k)$

- **Tautología** ⟶ Última columna tabla de verdad es solo "V"
- **Contradicción** ⟶ Última columna tabla de verdad es solo "F"
- **Equivalentes** ⟶ $p \equiv q$ si las tablas de verdad son iguales

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \qquad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

- **Proposición condicional** $(p \rightarrow q)$

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Contrarecíproco: $\neg q \rightarrow \neg p$

$\equiv \neg p \vee q$

- **Proposición bicondicional** $(p \leftrightarrow q)$

p	q	p↔q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

- **Función proposicional / predicado** $(P(x))$

P es un predicado si para cada $x \in D$, $P(x)$ es una proposición.

- **Cuantificación universal** $(\forall x\ P(x))$

Si para todo $x \in D$, se cumple la preposición $P(x)$, esta afirmación es verdadera

- **Cuantificación existencial** $(\exists x\ P(x))$

Si para una de las $x \in D$, se cumple la preposición $P(x)$, esta afirmación es verdadera

Demostración

Argumento válido que demuestra la veracidad del teorema

Reglas inferencia

Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore q$	**Eliminación**	a. $p \vee q$ $\sim q$ $\therefore p$ b. $p \vee q$ $\sim p$ $\therefore q$
Modus Tollens	$p \to q$ $\sim q$ $\therefore \sim p$	**Transitividad**	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$
Generalización	a. p $\therefore p \vee q$ b. q $\therefore p \vee q$	**Demostración por división en casos**	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore r$
Especialización	a. $p \wedge q$ $\therefore p$ b. $p \wedge q$ $\therefore q$		
Conjunción	p q $\therefore p \wedge q$	**Regla de contradicción**	$\sim p \to c$ $\therefore p$

Forma usual de enunciar teorema: $\forall x \in D$, si $P(x)$ entonces $Q(x)$

Demostración directa → Toma una $x \in D$ que haga $P(x)$ verdadera y comprueba si $Q(x)$ es verdadera también

- Ej: Demuestra que la suma de dos pares da par:

Proof:

Sea $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2k$ y $y = 2l$ para algun $k, l \in \mathbb{Z}$

Entonces: $x + y = 2k + 2n = 2(k+n)$.

Por tanto, la suma $x + y$ es par, como se desea.

Demostración por casos:

$$[(p_1 \vee \dots \vee p_n) \to q] \equiv [(p_1 \to q) \wedge \dots \wedge (p_n \to q)]$$

Demostración por contrarecíproco → $\forall x \in D$, si $\neg Q(x)$ entonces $\neg P(x)$

- **Demostración por reducción a lo absurdo**

  Comenzamos suponiendo que el enunciado es falso e intento demostrarlo.

TEMA 2: CONCEPTOS BÁSICOS TEORÍA DE CONJUNTOS

- Teoría de Conjuntos

- **Conjunto** ⟶ es una lista o colección de objetos bien definida.
- **Elemento** ⟶ es cada uno de los objetos de un conjunto

- A es subconjunto de B, si y solo si, A es elemento de B

  $\forall x (x \in A \longrightarrow x \in B)$ $\quad A \subseteq B$

- A es igual a B, si sólo si, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$
- Conjunto potencia de A ($P(A)$) es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A $|A| = n$, entonces $P(A) = 2^n$

Ej: Demuestra que $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

Como $x \in A$, también $x \in P(A)$. $y \in B$, entonces $y \in P(B)$. Por tanto $x, y \in A \cup B$ y, entonces, $x, y \in P(A \cup B)$.

Ej: Demuestra que $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

Supongamos que $x \in P(A) \cap P(B)$, entonces $x \in P(A)$ y $x \in P(B)$, lo que significa que $x \in A$ y $x \in B$. Entonces $x \in A \cap B$ y a su vez a $x \in P(A \cap B)$. Por tanto, $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$

$P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$

$P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$

Finalmente, supongamos que $x \in P(A \cap B)$, entonces $x \in A \cap B$, por lo que $x \in A$ $x \in B$. Como consecuencia, $x \in P(A)$ y $x \in P(B)$ y por tanto $x \in P(A) \cap P(B)$.

Principio Inclusión – Exclusión

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

Ej:

$|P| = 65$ $|P \cap A| = 28$
$|M| = 47$ $|P \cap M| = 24$
$|A| = 45$

$$100 = 65 + 47 + 45 - 28 - 24 - 12 + |P \cap A \cap M|,$$
$$|P \cap A \cap M| = 7$$

Principio de Inducción (Matemáticas)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ una afirmación matemática. Si se cumplen las propiedades, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es verdadera.

a) $P(1)$ verdadera (paso base)
b) $K \in \mathbb{N}$, si $P(K)$ es verdadera, también $P(K+1)$ (paso inductivo)

Proof: Sea $D = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es verdadera}\}$. Por definición, $D \subseteq \mathbb{N}$. Observa que las propiedades se cumplen. Como consecuencia, $\mathbb{N} \subseteq D$, lo que implica que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

Principio de Inducción Fuerte

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ una afirmación matemática. Si se cumplen las propiedades, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es verdadera.

a) $P(1)$ es verdadera

b) Para $K \geq 2$, si $P(i)$ es verdadera para todo $i \in \{1, \dots, K-1\}$ entonces $P(K)$ es verdadera

Proof: Para $r \in \mathbb{N}$, sea $Q(r)$ la afirmación de que $P(i)$ es verdadera para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Demostramos a) $P(1)$ verdadera.

Sea $K \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $Q(K-1)$ es verdadera. Esto implica que $P(i)$ es verdadera para todo $i \in \{1, \dots, K-1\}$. Propiedad b) dice que $P(K)$ es verdadera, lo que implica que $Q(K)$ también. Por tanto, verdadera.

- **Principio del Buen Orden**

Todo conjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo

Proof: Para $r \in \mathbb{N}$, sea $P(r)$ la afirmación de que todo conjunto no vacío que contenga r tiene un elemento mínimo. Inducción Fuerte $\rightarrow$ $P(n)$ verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

a) $P(1)$ es verdadera ya que 1 es el menor natural. Sea $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $P(i)$ es verdadera para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$. b) Sea $D \subseteq \mathbb{N}$ con $k \in D$. Si D no tiene un elemento menor que k, entonces k es el elemento mínimo. Si hay un elemento perteneciente a i, es menor que k y es un elemento mínimo. Por tanto, es verdadera

- **TEOREMA** $\rightarrow$ Los principios son equivalentes

TEMA 3. COMBINATORIA

- **Principio de Adición**

Recuento por casos. Si hay tareas $T_1, \dots, T_2$, que se pueden hacer de $t_1, \dots, t_n$ maneras distintas y son incompatibles dos a dos entonces hay $t_1 + \dots + t_n$ maneras distintas de hacer una de ellas.

$$|X_1 \cup X_2 \dots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| \dots + |X_n|$$

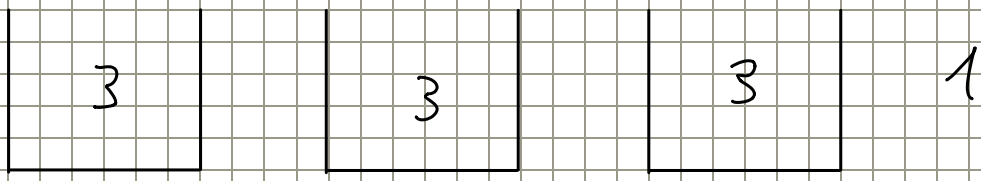
- **Principio de la multiplicación**

Recuento secuencial. Una tarea requiere realizar sucesivamente las tareas $T_1, \dots, T_n$. Si la tarea T_1 puede realizarse de t_1 formas; y para $i \in \{2, \dots, n\}$ la tarea T_i puede realizarse t_i formas después de haber realizado $T_1, \dots T_{i-1}$.

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_n|$$

Principio de las Cajas (Dirichlet o Palomar)

Si se distribuyen n objetos en m cajas, siendo $n > m \cdot t$, entonces, por lo menos en una de las cajas habrá mínimo $t+1$ objetos



$m = 3$ $n = 10$ $n > m \cdot t$; $10 > 3 \cdot 3$ Por tanto, sobra

R-Permutación

Una r-permutación de X es una lista ordenada de r objetos distintos elegidos entre los n objetos de X

$$V_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$VR_{(n,r)} = n^r$$

$$P_n = V_{(n,n)} = n!$$

$$PC_n = (n-1)!$$

R-Permutación

Una r-combinación de X es una colección sin orden de r objetos distintos elegidos entre los n objetos de X.

$$C_{(n,r)} = \frac{V_{(n,r)}}{V_{(r,r)}} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

$$CR_{(n,r)} = C_{(n-1+r,\, r)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{(n-1+r)!}{r! \cdot (n-1)!}$$

- **Sucesión**

Una sucesión de números reales es una función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, escrita como $f(n) = x_n$ para indicar el término n-ésimo y $\{x_n\} = x_0, x_1, \cdots, x_n$ para indicar la secuencia de términos

- **Recurrencia** $(x_n = x_{n-1} + x_{n-2})$

  - Recurrencias lineales homogéneas de orden $k \longrightarrow x_n = a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k}$ dado $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ y $a_k \neq 0$

  - Recurrencias lineales no homogéneas de orden $k \longrightarrow x_n = a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} + R_n$ dado $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ y $a_k \neq 0$ y $R_n \neq 0$

- **Forma explícita de una recurrencia**

  - Orden 1: $(x_n = \alpha x_{n-1} + R_n)$

    $x_n = \alpha^n x_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha^{n-j} \cdot R_j$

  - Homogénea de orden 2: $(x_n = a x_{n-1} + b x_{n-2})$

    - Ec característica $\longrightarrow t^2 - at - b = 0$

Sea λ_1, λ_2 las soluciones de la ec. característica:

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces, para toda solución $\{y_n\}$ de la recurrencia, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $y_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n$

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, entonces, para toda solución $\{y_n\}$ de la recurrencia, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $y_n = \alpha \lambda^n + \beta n \lambda^{n-1}$

Hallar valor de α y β con casos iniciales

TEMA 4. INTRODUCCIÓN TEORÍA DE NÚMEROS

- Algoritmo de la división

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$. Entonces existen enteros únicos k y r tales que:

$a = kb + r$ $\quad$ k = cociente $\quad$ r = resto. $\quad$ a/b $\quad$ $0 \leq r < |b|$

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Diremos que a divide b $(a|b)$, si existe un entero m tal que:

$b = ma$ $\quad$ a divisor de b $\quad$ b múltiplo de a

Teorema

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Las siguientes afirmaciones se satisfacen.

(i) $a|0$, $1|a$, $a|a$.
(iii) Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.
(ii) Si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = \pm b$.
(iv) Si $a|b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$.
(v) Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(bx+cy)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.

- Factorización Prima

Sea $n \in \mathbb{N}$. Una factorización prima de n expresa a n como un producto de potencias de primos distintos.

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$$

- Máximo Común Divisor

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos iguales a cero. El máximo común divisor (mcd) es el mayor número entero positivo que divide tanto a a como a b.

$mcd(a, b) = d$

- Teorema de Bezout

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos iguales a cero. Existen números $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$mcd(a, b) = x_0 a + y_0 b$$

- Algoritmo de Euclides

$$a = k_1 b + r_1 \; ; \quad b = k_2 \cdot r_1 + r_2 \; ; \quad \cdots \; ; \quad r_{n-2} = k_n \cdot r_{n-1} + r_n \; ; \quad r_{n-1} = k_{n+1} \cdot r_n + 0$$

Por tanto, $mcd(a, b) = r_n$

Ecuación Diofántica

Una ecuación diofántica lineal en dos variables es una ecuación de la forma:

$$ax + by = c$$

La ecuación admite solución si y solo si: $\text{mcd}(a, b) \mid c$

Teorema

Si x_0, y_0 es una solución particular de la ecuación diofántica $ax + by = c$, entonces todas las soluciones vienen dadas por:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{bt}{\text{mcd}(a,b)} \\ y &= y_0 - \frac{at}{\text{mcd}(a,b)} \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{Z}$$

TEMA 5: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

- **Grafo** = par ordenado $G=(V(G), E(G))$ donde:
  - $V(G)$ ⇒ Conjunto cuyos elementos se denominan **vértices**.
  - $E(G) \subseteq \{\{u,v\} : u, v \in V(G);\ u \neq v\}$ ⇒ elementos se denominan **aristas** $(uv \in E(G))$
  - **Orden de G** ⇒ N° vértices.
  - **Medida de G** ⇒ N° aristas

- **PROP:** Dos grafos G_1, G_2 son iguales si: $V(G_1)=V(G_2)$ y $E(G_1)=E(G_2)$

- $N_G(v)$ = Vértices vecinos a v. Se define como $N_G(v)=\{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$
- $\delta_G(v)$ = grado del vértice v = n° vecinos de v.

- $\delta(G)$ = grado mínimo de G
- $\Delta(G)$ = grado máximo de G

  → Si $\delta(G)=\Delta(G)=k$, G es un grafo k-regular

- $s(G)$ = Secuencia de grados de G es la secuencia de los n grados de los vértices del grafo G

$$0 < \delta(G) \leq \delta_G(v) \leq \Delta(G) \leq n-1$$

- **Formula de Grados**

$$2m = \sum_{v \in V(G)} \delta_G(v)$$

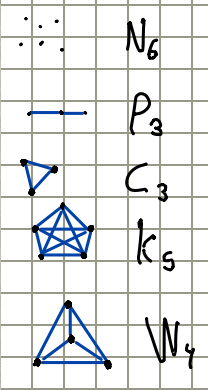
"La suma de los grados de cada vértice es igual a dos veces la medida de G"

- **PROP:** El n° de vértices de grado impar, siempre es par
- **PROP:** Si G es k-regular, entonces $m = \frac{nk}{2}$

- **Isomorfos**

Dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos $(G_1 \equiv G_2)$ si y sólo si existe una biyección $f: V(G_1) \to V(G_2)$ tal que si $\{a,b\} \in E(G_1)$ entonces $\{f(a), f(b)\} \in E(G_2)$
f es un isomorfismo de grafos.

- El **grafo nulo** de orden $n \geq 1$, denotado N_n, es isomorfo a un grafo G de orden n tal que $E(G)=\emptyset$.
- El **grafo camino** de orden $n \geq 2$, denotado P_n, es isomorfo a un grafo G tal que $V(G)=\{v_1,\ldots,v_n\}$ y $E(G)=\{v_1v_2,\ldots,v_{n-1}v_n\}$.
- El **grafo ciclo** de orden $n \geq 3$, denotado C_n, es isomorfo a un grafo 2-regular de orden n.
- El **grafo completo** de orden $n \geq 3$, denotado K_n, es isomorfo a un grafo $(n-1)$-regular de orden n.
- El **grafo rueda** de orden $n \geq 4$, denotado W_n, es isomorfo a un grafo G de orden n y medida $2n-2$ tal que $V(G)=\{v_1,\ldots,v_n\}$ y $E(G)=\{v_1v_2,\ldots,v_{n-2}v_{n-1},v_{n-1}v_1\} \cup \{v_nv_1,v_nv_2,\ldots,v_nv_{n-1}\}$.



Grafo Bipartito

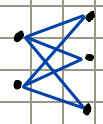
Un grafo bipartito, con bipartición (X, Y), es un grafo G que satisface lo siguiente:

- $V(G) = X \cup Y$ y $X \cap Y = \emptyset$
- Todo arista $xy \in E(G)$ cumple que $|\{x, y\} \cap X| = |\{x, y\} \cap Y| = 1$
  (1 vértice de X; 1 vértice de Y)

- Prop: Sea G un grafo bipartito, con bipartición (X, Y)

$$\sum_{x \in X} \delta_G(x) = \sum_{y \in Y} \delta_G(y)$$

- Un **grafo bipartito completo** de orden $n = k + r \geq 2$, denotado $K_{r,s}$, es isomorfo a un grafo bipartito G con bipartición (X, Y) tal que $|X| = r$, $|Y| = s$ y $E(G) = \{xy : x \in X, y \in Y\}$.
- El **grafo estrella** de orden $n \geq 3$, denotado S_n, es isomorfo al grafo bipartito completo $K_{1,n-1}$.



$K_{2,3}$

S_5

Secuencia Gráfica

Una secuencia gráfica es una secuencia ordenada en forma no creciente de forma $s = \{d_1, \cdots, d_n\}$ si existe un grafo G de orden n tal que $S = S(G)$

Teorema Havel-Hakimi:

Una secuencia ordenada en forma no creciente $s = \{d_1, \cdots, d_n\}$ es gráfica si y sólo si $S' = \{d_2 - 1, d_3 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n\}$ es secuencia gráfica.

S' se obtiene eliminando d_1 y restándole 1 a los d_1 elementos siguientes de S

Subgrafo

G_1 es subgrafo de G si: $V(G_1) \subseteq V(G)$ y $E(G_1) \subseteq E(G)$. Además, si $V(G_1) = V(G)$ entonces G_1 es un subgrafo generador de G

- Si $S \subseteq V(G)$, entonces el subgrafo de G inducido por S es el grafo denotado por $G[S]$, donde:

$$V(G[S]) = S \qquad E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$$

- Subgrafo al eliminar un vértice y sus aristas incidentes $G - v$
- Subgrafo al eliminar una arista $G - uv$ $\quad u, v \in V(G)$

Recorrido

Un recorrido en un grafo G es una secuencia de vértices $v_1, v_2, \dots, v_k$ con la propiedad $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Un recorrido de extremos v_1 y v_k lo denominaremos como (v_1, v_k)-recorrido.

- Un (v_1, v_k)-recorrido es cerrado si: $v_1 = v_k$. Si no se cumple, es abierto
- Un recorrido trivial es el formado por un solo vértice

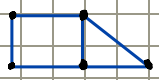
Camino

Un camino es un recorrido sin vértices repetidas

- Un ciclo es un recorrido cerrado pero que al eliminar el 1er vértice se convierte en un camino

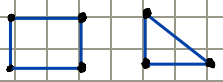
Conexo

Un grafo G es conexo si para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ hay un (u,v)-camino en G.



✓

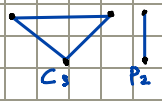
- Una componente (conexa) de G es un subgrafo conexo de G que no está contenido en cualquier otro subgrafo conexo.



X 2 componentes conexas

Grafo Unión

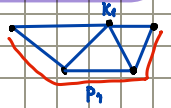
El grafo unión de G_1 y G_2 $(G_1 \cup G_2)$, es el grafo con $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$



$G_1 \cup G_2 = C_3 \cup P_2$

Grafo Suma

El grafo suma de G_1 y G_2 $(G_1 + G_2)$, es el grafo con $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$



$G_1 + G_2 = P_4 + K_1$

Grafo Complemento

El grafo complemento de un grafo G, denotado como G^c, es el grafo con $V(G^c) = V(G)$ y $E(G^c) = \{uv : u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$

- PROP: Isomorfos dos grafos si sólo si: $G \cong H \longleftrightarrow G^c \cong H^c$
- PROP: Si G es un grafo de orden n, entonces todo vértice $v \in V(G)$ satisface que $\delta_{G^c}(v) = n - 1 - \delta_G(v)$